

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

КИНЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям
и выполнению контрольной работы по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
для студентов направлений

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных
производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2025

Введение

Теоретическая механика является основой многих современных инженерных дисциплин. Без глубокого усвоения положений и методов теоретической механики невозможно дальнейшее изучение большинства технических наук. Кроме того, в процессе изучения теоретической механики студенты впервые используют математический аппарат для решения конкретных задач.

Особое место в изучении курса занимает решение задач, которое позволяет закреплять и углублять теоретические знания, развивает навыки самостоятельного мышления, помогает овладению математическими методами.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов, и могут быть использованы преподавателями при проведении практических занятий и контрольных работ по теоретической механике при изучении раздела «Кинематика».

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве вне связи с силами, определяющими это движение.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения данного тела, определить все кинематические характеристики как самого тела, так и его точек (траекторию, скорость, ускорения)

Методические указания включают в себя сведения из теории, примеры и 10 различных вариантов заданий по темам: кинематика точки, вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси, плоскопараллельное движение твёрдого тела, сложное движение точки.

1. Кинематика точки

Для того, чтобы задать движение точки, нужно задать её положение в выбранной системе отсчёта в любой момент времени. Существует три способа задания движения: а) *естественный*, б) *векторный*, в) *координатный*.

а) *Естественный способ задания движения.*

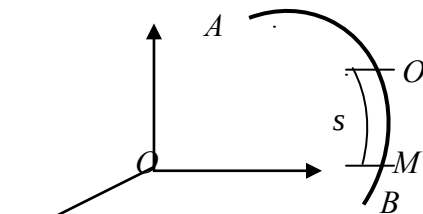


Рис.1

Координата s движущейся по траектории (непрерывная линия, которую описывает точки M изменяется со временем t , то есть

$$s = f(t)$$

Это равенство и есть закон движения точки M вдоль траектории.

Скорость точки в данный момент времени при естественном способе задания движения:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Вектор скорости $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории. Численная величина скорости V отличается от модуля скорости только знаком.

Вектор ускорения $\vec{a}$ всегда является диагональю параллелограмм, построенного на его составляющих $\vec{a}_\tau$ (касательная составляющая) и $\vec{a}_n$ (нормальная составляющая). Величины касательного и нормального ускорения находятся по формулам:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где ρ - радиус кривизны траектории. Численная величина полного ускорения вычисляется по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}$$

б) Векторный способ задания движения.

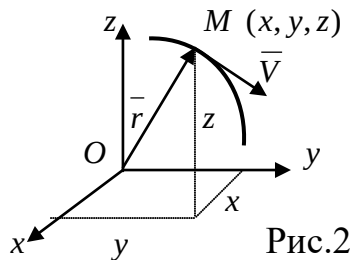


Рис.2

При движении точки M вдоль траектории (рис.2) с течением времени радиус-вектор $\vec{r}$ точки M будет изменяться, то есть

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \text{ где } \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Это и есть закон движения в векторной форме. Годограф этого вектора определяет траекторию движения точки.

Скорость точки в данный момент времени t есть

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ускорение точки в данный момент времени t есть

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

в) Координатный способ задания движения.

При движении точки M вдоль траектории (рис.2) координаты точки x, y, z с течением времени будут изменяться, то есть

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

Эти соотношения представляют собой уравнения движения (закон движения) точки в декартовых прямоугольных координатах. Они представляют собой и параметрические уравнения траектории.

Исключив параметр t из уравнений движения, получим уравнение траектории через координаты точки.

Скорость точки $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ в данный момент времени определяется соотношениями:

составляющие скорости $V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt},$

модуль скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$

направляющие косинусы $\cos \alpha = \frac{V_x}{V}, \quad \cos \beta = \frac{V_y}{V}, \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V},$

где α, β, γ - углы между вектором скорости и осями координат.

Ускорение точки $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ в данный момент определяется соотношениями:

составляющие ускорения $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$

модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

направляющие косинусы $\cos \varphi = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \mu = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \nu = \frac{a_z}{a},$

где φ, μ, ν - углы между вектором ускорения и осями координат.

Пример 1. Даны уравнения движения точки в плоскости Oxy :

$$x = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \quad y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1\text{с}$ найти скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1) Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2} \rightarrow \frac{3-x}{2} = 1 - 2 \frac{(y+1)^2}{4} \quad (1)$$

Отсюда уравнение траектории точки M - парабола:

$$x = (y+1)^2 + 1 \quad (2)$$

Найдём положение точки M на траектории в момент времени $t_1 = 1\text{с}$

$$x_1 = -\sqrt{2} + 3 \approx 1,6 \quad y_1 = 2 \cdot 0,383 - 1 \approx -0,23 \quad M_1(1,6; -0,23)$$

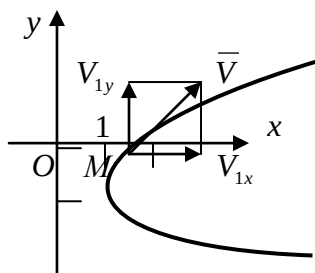


Рис.3

2) Скорость точки найдём по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

и при $t_1 = 1c$ $V_{1x} = 1,11cm/c$, $V_{1y} = 0,73cm/c$ (3)

Модуль скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ в момент времени $t_1 = 1c$ равен: $V_1 = 1,33cm/c$.

3) Аналогично найдём ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right),$$

и при $t_1 = 1c$ $a_{1x} = 0,87cm/c^2$, $a_{1y} = -0,82cm/c^2$ (4)

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2}$ в момент времени $t_1 = 1c$ равен: $a_1 = 0,88cm/c^2$.

4) Касательное ускорение найдём, дифференцируя по времени равенство

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2,$$

получим

$$2V \frac{dV}{dt} = 2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \quad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдём, что при $t_1 = 1c$ $a_{1\tau} = 0,66cm/c^2$.

5) Нормальное ускорение точки найдём из формулы:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

и при $t_1 = 1c$ $a_{1n} = 0,58cm/c^2$

6) Радиус кривизны траектории найдём из формулы:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

Подставляя значения V_1 и a_{1n} отсюда при $t_1 = 1c$, получим $\rho_1 = 3,05cm$.

Пример 2.

Точка движется по дуге окружности $R = 2m$ по закону:

$$s = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad (s - \text{в метрах, } t - \text{в секундах}), \quad \text{где } s = \overset{\cup}{AM}.$$

Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1c$.

Решение.

Определим скорость точки:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

и при $t_1 = 1c$ получим :

$$V_1 = 1,11m/c$$

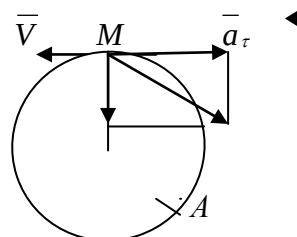


Рис.4

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}.$$

При $t_1 = 1\text{с}$ получим:

$$a_{1\tau} = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} = 0,87\text{м/с}^2, \quad a_{1n} = \frac{V_1^2}{2} = \frac{(1,11)^2}{2} = 0,62\text{м/с}^2.$$

Тогда полное ускорение точки при $t_1 = 1\text{с}$ будет:

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \sqrt{(0,87)^2 + (0,62)^2} = 1,07\text{м/с}^2$$

Векторы скорости и ускорения изображены на рис.4, учитывая знаки V_1 и $a_{1\tau}$ ($\bar{a}_n$ направлен к центру окружности) и считая положительным направлением от A к M .

2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором две какие-нибудь точки, принадлежащие телу, остаются во время движения неподвижными.

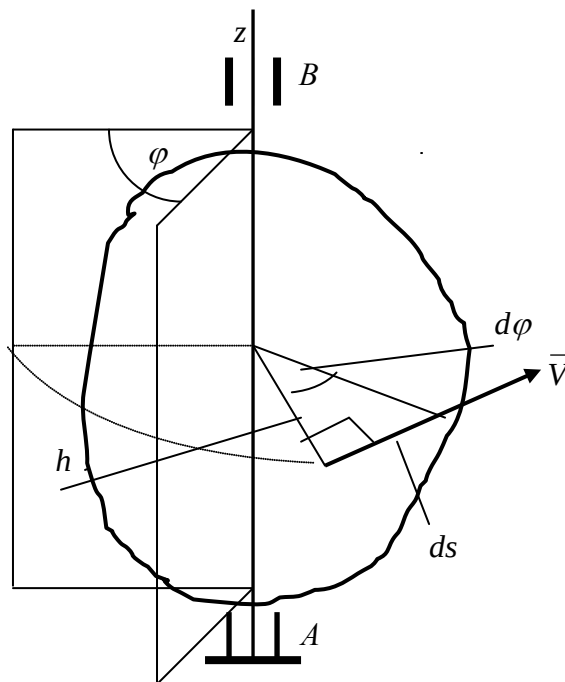


Рис.5

Положение тела в любой момент времени будет определяться углом φ - углом поворота тела, положительным, если вращение происходит против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки.

Закон вращательного движения:

$$\varphi = f(t)$$

Основные кинематические характеристики вращательного движения твёрдого тела являются: угловая скорость ω и угловое ускорение ε .

Угловой скоростью тела в данный момент времени t называется:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ [с}^{-1}\text{]}$$

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \text{ [с}^{-2}\text{]}$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен, как и $\vec{\omega}$, вдоль оси вращения. Если направления $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают, то вращение ускоренное, если направления $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ противоположны, то вращение замедленное.

Точка M вращающегося тела, находящаяся на расстоянии h от оси вращения за время dt поворачивается на угол $d\varphi$ и по траектории перемещается на $ds = h d\varphi$, тогда *линейная* (или *окружная*) скорость точки M твёрдого тела равна:

$$V = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega$$

Ускорение точки M вращающегося твёрдого тела находится по формулам:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = h \frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{h^2 \omega^2}{h} = h\omega^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{h^2 \varepsilon^2 + h^4 \omega^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Отклонение вектора полного ускорения $\vec{a}$ от радиуса определяется углом μ :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Пример 3.

Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами $R_2 = 6\text{ см}$ и $r_2 = 4\text{ см}$, и колесо 3 радиуса $R_3 = 8\text{ см}$, скреплённое с валом радиуса $r_3 = 3\text{ см}$ находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце. Рейка движется по закону: $s_1 = 3t^3$.

Определить
в момент времени $t = 3\text{ с}$
 $\omega_3, V_4, \varepsilon_3, a_A$.

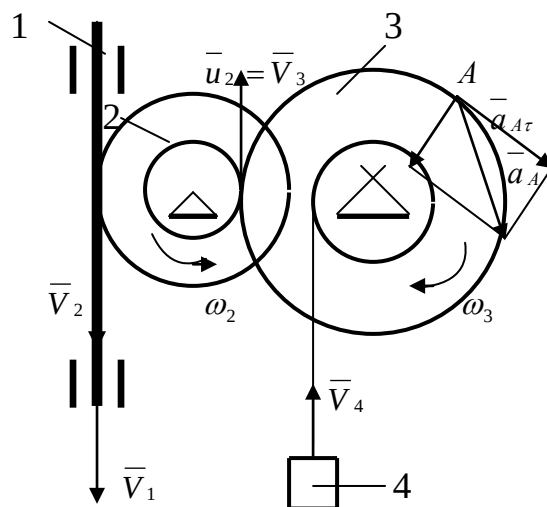


Рис.6

Решение.

При решении задачи следует учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ремённой передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колёс, в данный момент времени численно равны; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колёс (радиуса R_i) через V_i , а скорости точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i) – через u_i .

1) Зная закон движения рейки 1, найдём её скорость:

$$V_1 = \frac{ds}{dt} = 9t^2 \quad (1)$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то

$$V_2 = V_1 \rightarrow \omega_2 R_2 = V_1. \quad (2)$$

Колёса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно,

$$u_2 = V_3 \rightarrow \omega_2 r_2 = \omega_3 R_3. \quad (3)$$

Из равенств (1), (2) и (3) находим:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \quad (4)$$

Тогда для момента времени $t = 3c$ получим: $\omega_3 = 6,75c^{-1}$.

2) Найдём V_4 . Так как $V_4 = \omega_3 r_3$, то при $t = 3c$ $V_4 = 20,25cm/c$.

3) Найдём ε_3 . Из второго равенства (4), получим

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 1,5t \rightarrow \text{при } t = 3c \quad \varepsilon_3 = 4,5c^{-2}$$

4) Найдём a_A . Для точки A : $\bar{a}_A = \bar{a}_{Ar} + \bar{a}_{An}$, где численно

$$a_{Ar} = R_3 \varepsilon_3, \quad a_{An} = R_3 \omega_3^2$$

Тогда для момента времени $t = 3c$ получим:

$$a_{Ar} = 36cm/c^2, \quad a_{An} = 364,5cm/c^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ar}^2 + a_{An}^2} = 366,3cm/c^2.$$

3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоским (или *плоскопараллельным*) называется такое движение твёрдого тела, когда все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости Π .

Рассмотрим сечение S данного тела какой-нибудь плоскостью Oxy параллельной плоскости Π .

Все точки тела на прямой, перпендикулярной сечению S . Движутся тождественно. Поэтому для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение S тела в плоскости Oxy .

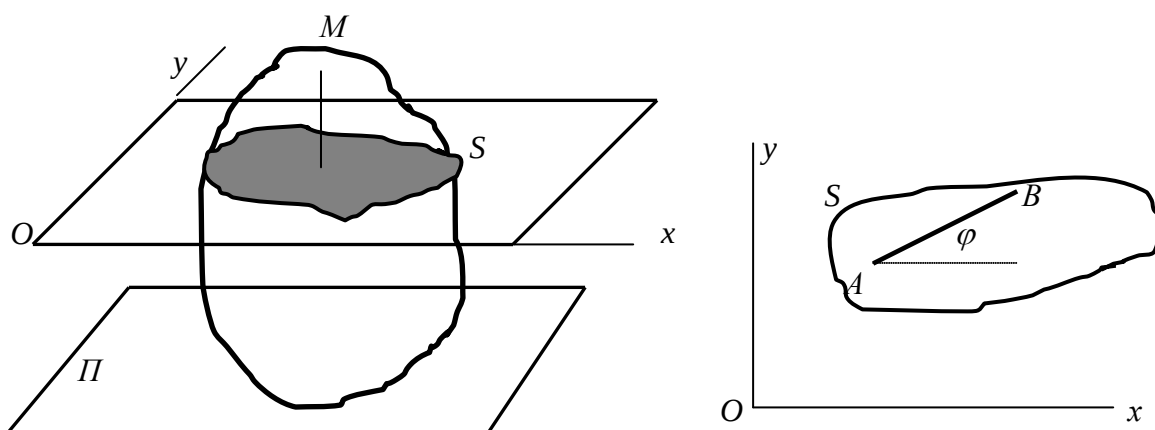


Рис.7

Положение сечения S в плоскости определяется положением какого-либо отрезка AB . В свою очередь положение отрезка можно задать зная x_A, y_A и угол φ . Точка A называется *полюсом*.

При движении координаты полюса x_A, y_A и угол φ будут изменяться со временем, то есть являются функциями времени:

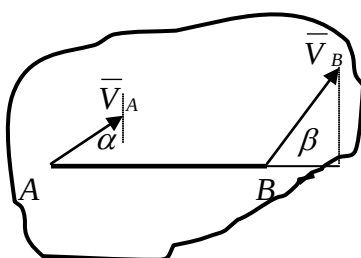
$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (1)$$

Это уравнение плоского движения твёрдого тела.

Плоское движение твёрдого тела складывается из поступательного движения, при котором все точки движутся так же как полюс, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость точки твёрдого тела при плоском движении может быть найдена с помощью теоремы о проекции скоростей:

Теорема: Проекции скоростей двух точек твёрдого тела, на прямую их соединяющую, равны между собой.

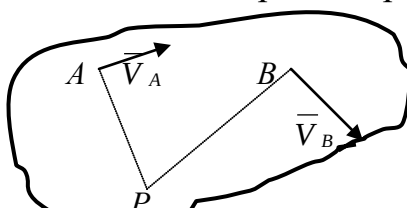


$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha$$

Рис.8

Для нахождения скорости любой точки твёрдого тела также может быть использован мгновенный центр скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка P сечения S тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю.



$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \omega$$

Рис.9

То есть угловая скорость тела равна отношению скорости какой-нибудь точки к её расстоянию до мгновенного центра скоростей, а скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до того же центра.

Пример 3.

Механизм (рис.10) состоит из стержней 1,2,3,4 и ползуна B , соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

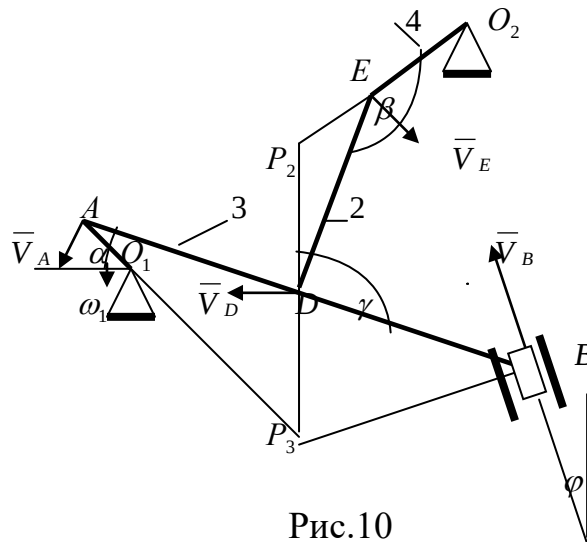


Рис.10

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0,4\text{м}$, $l_2 = 1,2\text{м}$, $l_3 = 1,4\text{м}$, $\omega_1 = 2\text{с}^{-1}$.

Определить: V_B , V_E , ω_2 .

Решение.

1) Определим $\bar{V}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1 , можем определить $\bar{V}_A$; численно

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0,8\text{м/с}; \quad \bar{V}_A \perp O_1 A \quad (2)$$

Направление $\bar{V}_B$ найдём, учитывая, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно, и стержню AB . Зная $\bar{V}_A$ и направление $\bar{V}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{V}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ \rightarrow V_B = 0,46\text{м/с} \quad (3)$$

2) Определим $\bar{V}_E$. Точка E принадлежит стержню DE . Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{V}_E$. Надо сначала найти скорость точки D , принадлежащей одновременно стержню AB . Для этого, зная $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB ; это точка P_3 , лежащая на пересечении перпендикуляров $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, восстановленных из точек A и B (к $\bar{V}_A$ перпендикулярен стержень 1).

По направлению вектора $\bar{V}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МПС P_3 .

Вектор $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку P_3D , соединяющему точки D и P_3 . И направлен в сторону поворота. Величину V_D найдём из пропорции:

$$\frac{V_D}{P_3D} = \frac{V_B}{P_3B} \quad (4)$$

P_3D и P_3B найдём из прямоугольного $\triangle AP_3B$ (так как острые углы в нём равны 30° и 60°):

$$P_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5AB = BD.$$

Тогда $\triangle BP_3D$ является равнобедренным, откуда $P_3B = P_3D$.

В результате равенство (4) даёт:

$$V_D = V_B = 0,46 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_D \perp P_3D. \quad (5)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E , вращающемуся вокруг точки O_2 , то $\vec{V}_E \perp O_2E$. Тогда, восстанавливая из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_D$, построим МЦС – точку P_2 стержня DE . По направлению вектора $\vec{V}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра P_2 . Вектор $\vec{V}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рисунка 10 видно, что $\angle P_2ED = \angle P_2DE = 30^\circ$, откуда $P_2E = P_2D$. Составим теперь пропорцию:

$$\frac{V_E}{P_2E} = \frac{V_D}{P_2D} \rightarrow V_E = V_D = 0,46 \text{ м/с} \quad (6)$$

3) Определим ω_2 . Так как МЦС стержня 2 известен (точка P_2), и

$$P_2D = \frac{l_2}{2 \cos 30^\circ} = 0,69 \text{ м},$$

то

$$\omega_2 = \frac{V_D}{P_2D} = 0,67 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $V_B = 0,46 \text{ м/с}$, $V_E = 0,46 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,67 \text{ с}^{-1}$.

4. Сложное движение материальной точки

Движение точек и тел можно рассматривать не только по отношению к одной системе отсчёта, но одновременно и по отношению к двум. Одна из них условно неподвижна, а другая движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом телом, называется *составным* или *сложным*.

Относительным движением называется движение, совершаемое точкой по отношению к подвижной системе координат

Переносным движением называется движение, совершаемое подвижной системой координат и всеми связанными с ней точками по отношению к неподвижной системы координат.

Абсолютным или сложным движением называется движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системы координат.

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}_{abc} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер} \quad (1)$$

Абсолютное ускорение сложного движения точки равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_k, \quad (2)$$

где $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн})$ - ускорение Кориолиса.

Пример 4.

Пластина $OEAB_1D$ ($OE = OD$) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = t^2 - 0,5t^3$.

По дуге окружности радиуса $R = 0,5\text{ м}$ движется точка B по закону $s = \overset{\circ}{AB} = \pi R \cos(\frac{\pi t}{3})$ (положительное направление отсчёта s - от A к B).

Определить: V_{abc} и a_{abc} в момент времени $t_1 = 2\text{ с}$.

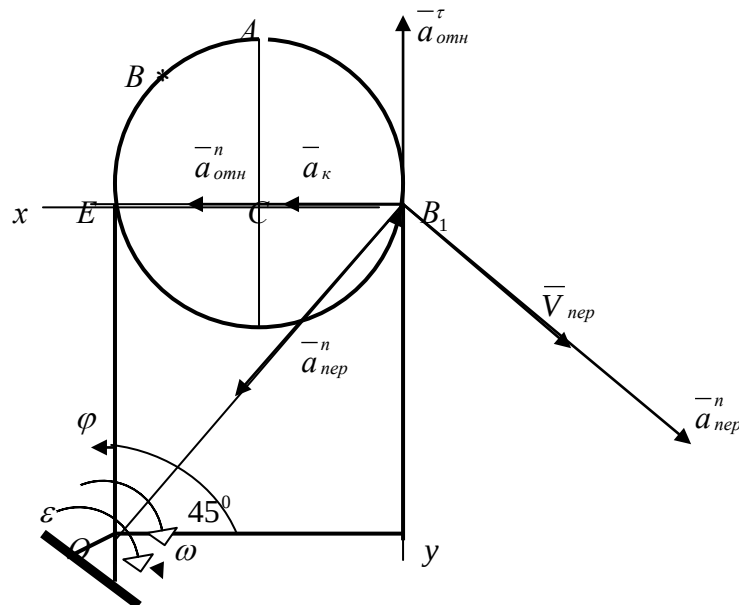


Рис.11

Решение.

Рассмотрим движение точки B как сложное движение, считая её движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\vec{V}_{abc}$ и абсолютное ускорение $\vec{a}_{abc}$ точки B найдутся по формулам:

$$\vec{V}_{abc} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}, \quad \vec{a}_{abc} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_k,$$

где, в свою очередь,

$$\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^n, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^n \quad (3)$$

Определим все, входящие в равенства (1),(2),(3) величины.

1) Относительное движение.

Это движение происходит по закону

$$s = \overset{\cup}{AB} = \pi R \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (4)$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1 .

Полагая в уравнении (4) $t_1 = 2c$, получим

$$s_1 = \pi R \cos\left(\frac{\pi 2}{3}\right) = -0,5\pi R,$$

тогда

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -0,5\pi$$

Знак минус говорит о том, что точка B в момент времени $t_1 = 2c$ находится справа от точки A .

Находим числовые значения: $V_{отн}$, $a_{отн}^{\tau}$, $a_{отн}^n$

$$V_{отн} = \frac{ds}{dt} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$a_{отн}^{\tau} = \frac{dV_{отн}}{dt} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad a_{отн}^n = \frac{V_{отн}^2}{\rho_{отн}} = \frac{V_{отн}^2}{R},$$

где $\rho_{отн}$ - радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R . Для момента времени $t_1 = 2c$, учитывая, что $R = 0,5м$, получим:

$$V_{отн} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} = -1,42м/с,$$

$$a_{отн}^{\tau} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi^3}{36} = 0,86м/с, \quad a_{отн}^n = \frac{\pi^4}{24} = 4,06м/с \quad (5)$$

Знаки найденных величин показывают: вектор $\overline{a_{отн}^{\tau}}$ направлен в сторону положительного отсчёта расстояния s , а вектор $\overline{V_{отн}}$ - в противоположную сторону; вектор $\overline{a_{отн}^n}$ направлен к центру C окружности.

2) *Переносное движение.*

Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0,5t^3$. Найдём сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного движения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t - 1,5t^2, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 - 3t,$$

и при $t_1 = 2c$ получим:

$$\omega = -2c^{-1}, \quad \varepsilon = -4c^{-2} \quad (6)$$

Знаки ω и ε указывают, что в момент времени $t_1 = 2c$ направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчёта угла φ .

Для определения $\overline{V_{пер}}$ и $\overline{a_{пер}}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O . Из рисунка видно, что $h_1 = 2R\sqrt{2} = 1,41м$. Тогда в момент времени $t_1 = 2c$, учитывая равенства (6), получим:

$$V_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 2,82м/с,$$

$$a_{пер}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5,64м/с^2, \quad a_{пер}^n = \omega^2 \cdot h_1 = 5,64м/с^2. \quad (7)$$

3) Кориолисово ускорение.

Модуль кориолисова ускорения находим по формуле

$$a_k = 2|V_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin \alpha ,$$

где α - угол между вектором $\bar{V}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$).

В нашем случае этот угол равен 90° . Так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\bar{V}_{отн}$. Численно в момент времени $t_1 = 2c$ (в этот момент времени $|V_{отн}| = 1,42 м/с$ и $|\omega| = 2c^{-1}$) получим:

$$a_k = 5,68 м/с^2 \quad (8)$$

Направление $\bar{a}_k$ найдём по правилу Н.Е.Жуковского: так как вектор $\bar{V}_{отн}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернём его на 90° в направлении ω , то есть по ходу часовой стрелки. (Иначе направление $\bar{a}_k$ можно найти, учитывая, что $\bar{a}_k = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{отн})$).

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1),(2),(3) векторов найдены и для определения V_{abc} и a_{abc} остаётся только сложить эти векторы. Произведём это сложение аналитически.

4) Определение V_{abc} .

Введём прямоугольную систему координат B_1xy и спроектируем почленно на оси этой системы координат обе части равенства:

$$\bar{V}_{abc} = \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{пер} .$$

Получим для момента времени $t_1 = 2c$:

$$V_{abcx} = V_{отнх} + V_{перх} = 0 - |V_{пер}| \cos 45^\circ = -1,99 м/с ;$$

$$V_{abcy} = V_{отны} + V_{перу} = |V_{отн}| + |V_{пер}| \cos 45^\circ = 3,41 м/с ,$$

тогда

$$V_{abc} = \sqrt{V_{abcx}^2 + V_{abcy}^2} = 3,95 м/с .$$

5) Определение a_{abc} .

Спроектируем на оси системы координат B_1xy обе части равенства теоремы о сложении ускорений:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{отн}^{\tau} + \bar{a}_{отн}^n + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_k , \quad (9)$$

получим

$$a_{abcx} = a_{отн}^n + a_k + a_{пер}^n \cos 45^\circ - |a_{пер}^{\tau}| \cos 45^\circ ,$$

$$a_{abcy} = a_{пер}^n + |a_{пер}^{\tau}| \cos 45^\circ - |a_{отн}^{\tau}| .$$

Подставив в полученные равенства значения, которые имеют в момент времени $t_1 = 2c$., найдём:

$$a_{abcx} = 9,74 м/с^2 , \quad a_{abcy} = 7,15 м/с^2 ,$$

тогда

$$a_{abc} = \sqrt{a_{abcx}^2 + a_{abcy}^2} = 12,08 м/с^2 .$$

Ответ: $V_{abc} = 3,95 м/с$, $a_{abc} = 12,08 м/с^2$.

Задачи для самостоятельной работы студентов

Задача 1(рис. 3)

Даны уравнения движения точки в плоскости Oxy :

$$x = f(t), \quad y = f(t) \quad (x, y - \text{в сантиметрах, } t - \text{в секундах}).$$

Определить: уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1с$ найти скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Таблица 1

Варианты заданий к задаче 1

Номер варианта	$x = f(t)$	$y = f(t)$
1	$6\cos(\pi t/6) - 3$	$12\sin(\pi t/6)$
2	$4\cos(\pi t/6)$	$-6\cos(\pi t/3)$
3	$-3\cos(\pi t/6) + 2$	$-3\sin^2(\pi t/6)$
4	$t - 4$	$2t^2 + 2$

Номер варианта	$x = f(t)$	$y = f(t)$
5	$4 - 2t$	$8\sin(\pi t/4)$
6	$2 - t$	$(2 + t)^2$
7	$2t$	$2t^3$
8	$8\sin(\pi t/6) - 2$	$4\cos(\pi t/6)$
9	$12\sin(\pi t/6)$	$6\cos^2(\pi t/6)$
10	$-6\sin(\pi t/6) + 4$	$4\cos(\pi t/3)$
11	$t - 2$	$2 - t^3$
12	$6\cos(\pi t/6) - 3$	$9\sin(\pi t/6)$
13	$4\cos(\pi t/6)$	$3\cos(\pi t/3)$
14	$-3\cos(\pi t/6) + 2$	$10\sin(\pi t/6)$
15	$t - 4$	$2\cos(\pi t/4)$
16	$4 - 2t$	$2 - 3t^2$
17	$2 - t$	$2\sin(\pi t/4)$
18	$2t$	$(t + 1)^2$
19	$8\sin(\pi t/6) - 2$	$10\cos(\pi t/6)$
20	$12\sin(\pi t/6)$	$-4\cos^2(\pi t/6)$

Задача 2 (рис. 4)

Точка движется по дуге окружности R по закону:

$$s = f(t) \quad (s - \text{в метрах, } t - \text{в секундах}), \quad \text{где } s = \overset{\cup}{AM}.$$

Определить: скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1\text{с}$.

Изобразить на рисунке векторы скорости и ускорения, считая, что точка в этот момент времени находится в положении М, а положительное направление отсчета s – от А к М.

Таблица 2

Варианты заданий к задаче 2

Номер варианта	R	$s = f(t)$
1	1	$4\cos(\pi t/6)$
2	3	$2\sin(\pi t/3)$
3	2	$6t - 2t^2$
4	4	$-2\sin(\pi t/6)$
5	6	$4\cos(\pi t/3)$
6	5	$-3\sin(\pi t/3)$
7	7	$-10t + 3t^2$
8	9	$-2\cos(\pi t/3)$
9	10	$3\sin(\pi t/6)$
10	8	$-2\cos(\pi t/6)$
11	5	$4\cos(\pi t/6)$
12	7	$2\sin(\pi t/3)$
13	9	$6t - 2t^2$
14	10	$-2\sin(\pi t/6)$
15	8	$4\cos(\pi t/3)$
16	1	$-3\sin(\pi t/3)$

Номер варианта	R	s= f (t)
17	3	$-10t + 3t^2$
18	2	$-2\cos(\pi/3)$
19	4	$3\sin(\pi/6)$
20	6	$-2\cos(\pi/6)$

Задача 3(рис. 6)

Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 , и колесо 3 радиуса R_3 , скреплённое с валом радиуса r_3 находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце. Рейка движется по закону: $s = f(t)$. На ободе колеса 3 находится точка А.

Определить: $\omega_3, V_4, \varepsilon_3, a_A$. в момент времени $t = 3c$.

Таблица 3

Варианты заданий к задаче 3

Номер варианта	R_2	r_2	R_3	r_3	$S_1=f(t)$
1	4	2	8	6	$4(7t - t^2)$
2	6	4	10	5	$2(-3 + t^2)$
3	8	6	12	4	$-9 + 2t^2$
4	5	3	6	4	$7t - 3t^2$
5	7	5	16	12	$3t - t^2$
6	9	7	14	10	$5t - 2t^2$
7	10	8	9	6	$2(-3t + t^2)$
8	12	6	11	5	$-8 + 3t^2$
9	11	5	16	10	$-5t + 2t^2$
10	10	4	15	9	$8t - 3t^2$
11	8	4	6	3	$4(7t - t^2)$
12	10	6	5	2	$5 - 4t^2$
13	12	8	4	2	$3t - 2t^2$
14	6	5	6	4	$6t + t^2$
15	16	7	12	6	$4t + 3t^2$
16	14	9	10	5	$7t - 2t^2$
17	9	5	6	3	$8t^2 + 5$
18	11	8	5	2	$3t^2 - 8$
19	16	11	10	7	$5t - 4t^2$
20	15	10	9	6	$6 + 9t^2$

Задача 4(рис.10)

Механизм состоит из стержней 1,2,3,4 и ползуна В, соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $AD = DB$, $\omega_1 = 2c^{-1}$, построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α .

Определить: V_B , V_E , ω_2 .

Таблица 4

Варианты заданий к задаче 4

Номер варианта	α	β	γ	φ	θ	l_1	l_2	l_3
1	0	60	30	0	120	0,1	1,1	1,3
2	90	120	150	0	30	0,2	1,2	1,4
3	30	60	30	0	120	0,3	1,3	1,5
4	60	150	150	90	30	0,4	1,4	1,6
5	30	30	60	0	150	0,5	1,5	1,7
6	90	120	120	90	60	0,6	1,6	1,8
7	90	150	120	90	30	0,7	1,7	1,9
8	0	60	60	0	120	0,8	1,8	2,0
9	60	150	120	90	30	0,9	1,9	2,1
10	30	120	150	0	60	0,1	1,3	1,5
11	120	30	30	90	150	0,2	1,4	1,6
12	0	60	90	0	120	0,3	1,5	1,7
13	60	150	30	90	30	0,4	1,6	1,8
14	0	150	30	0	60	0,5	1,7	1,9
15	30	120	120	0	60	0,6	1,8	2,0
16	90	120	90	90	60	0,7	1,9	2,1
17	0	150	90	0	120	0,8	2,0	2,2
18	30	120	30	0	60	0,9	2,1	2,3
19	90	120	120	90	150	0,2	1,4	1,8
20	60	60	60	90	30	0,5	1,6	1,9

Задача 5 (рис.11)

Пластина $OEAB_1D$ ($OE = OD$) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = t^2 - 0,5t^3$.

По дуге окружности радиуса $R = 0,5\text{ м}$ движется точка B по закону $s = \overset{\cup}{AB} = \pi R \cos(\frac{\pi t}{3})$ (положительное направление отсчёта s - от A к B).

Определить: $V_{a\vec{oc}}$ и $a_{a\vec{oc}}$ в момент времени $t_1 = 2\text{ с}$.

Таблица 5

Варианты заданий к задаче 5

Номер варианта	$\varphi=f(t)$	R	$s=f(t)$
1	$4(t^2-t)$		$12\sin(\pi t/6)$
2	$3t^2-8t$		$-6\cos(\pi t/3)$
3	$6t^3-12t^2$		$-3\sin(\pi t/6)$
4	$10t^2-5t^2$		$-2\cos(\pi t/6)$
5	$2(t^2-t)$		$8\sin(\pi t/4)$
6	$5t-4t^2$		$3\cos(\pi t/3)$
7	$15t-3t^3$		$10\sin(\pi t/6)$

Номер варианта	$\varphi=f(t)$	R	$s=f(t)$
8	$2t^3-11t$		$4\cos(\pi t/6)$
9	$6t^2-3t^3$		$6\cos(\pi t/6)$
10	$2t^2+2$		$4\cos(\pi t/3)$
11	$(2+t)^2$		$-2\cos(\pi t/6)$
12	$2t^3$		$4\cos(\pi t/6)$
13	$6t-2t^2$		$2\sin(\pi t/3)$
14	$-10t+3t^2$		$10\cos(\pi t/6)$
15	$4t+3t^2$		$-4\cos(\pi t/6)$
16	$7t-2t^2$		$4\cos(\pi t/3)$
17	$8t^2+5$		$-3\sin(\pi t/3)$
18	$3t^2-8$		$-2\sin(\pi t/6)$
19	$5t-4t^2$		$-2\cos(\pi t/3)$
20	$6+9t^2$		$3\sin(\pi t/6)$

Задачи для самостоятельной работы студентов

7.1. Траектория и положение точки в прямоугольной системе координат	
Заданы уравнения движения точки $x = 1 + 2 \sin 0,1t$, $y = 3t$. Определить координату x точки в момент времени, когда ее координата $y = 12$ м. (1,78)	Задано уравнение движения точки $r = 3 \vec{ti} + 4 \vec{tj}$. Определить координату y точки в момент времени, когда $r = 5$ м. (4)
Заданы уравнения движения точки $x = 3t$, $y = t^2$. Определить расстояние точки от начала координат в момент времени $t = 2$ с. (7,21)	Заданы уравнения движения точки $x = \cos t$, $y = 2\sin t$. Определить расстояние от точки до начала координат в момент времени $t = 2,5$ с. (1,44)
Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = t$. Определить время t , когда расстояние от точки до начала координат достигнет 10м. (4,47)	Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = 1 - 2\sin 0,1t$. Определить ближайший момент времени, когда точка пересечет ось Ox . (5,24)
Заданы уравнения движения точки $x = \sin t$, $y = \cos t$. Определить ближайший момент времени, когда радиус-вектор точки, проведенный из начала координат, образует угол 45° с осью Ox . (0,785)	<i>точки</i> Для точки A заданы уравнения движения $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$. Определить угол между осью Ox и радиусом-вектором OA точки в момент времени $t = 1,5$ с. (1,52)
Дано уравнение движения точки $x = \sin \pi t$. Определить скорость в ближайший после начала движения момент времени t , когда координата $x = 0,5$ м. (2,72)	7.2. Скорость точки в прямоугольной системе координат
Дано уравнение движения точки $r = t^2 \vec{i} + 2 \vec{tj} + 3 \vec{k}$. Определить модуль	Даны уравнения движения точки $x = t^2$, $y = \sin 7\pi t$, $z = \cos \pi t$. Определить модуль скорости

скорости точки в момент времени $t = 2 \text{ с.}$ (4,47)	точки в момент времени $t = 1 \text{ с.}$ (3,72)
Скорость движения точки $v = 2ti + 3j$. Определить угол в градусах между вектором скорости и осью Ox в момент времени $t = 4 \text{ с.}$ (20,6)	Проекция скорости точки $v_x = 2 \cos \pi t$. Определить координату x точки в момент времени $t = 1 \text{ с.}$, если при $t_0 = 0$ координата $x_0 = 0$. (0)
Точка движется по прямой с ускорением $a = 0,3 \text{ м/с}^2$. Определить начальную скорость, если через 6 с скорость точки стала равной 3 м/с. (1,2)	7.3. Постоянное ускорение точки в прямоугольной системе координат
Скорость автомобиля равномерно увеличивается в течение 12 с от нуля до 60 км/ч. Определить ускорение автомобиля. (1,39)	Точка движется по прямой с ускорением $a = 0,5 \text{ м/с}^2$. Определить, за какое время будет пройдено расстояние 9 м. , если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$. (6)
Сколько секунд должен работать двигатель, который сообщает ракете ускорение $3g$, чтобы скорость ракеты в прямолинейном движении возросла с 3 до 5 км/с? (68,0)	Самолет при посадке касается посадочной полосы с горизонтальной скоростью 180 км/ч. После пробега 1000 м самолет останавливается. Определить модуль среднего замедления самолета. (1,25)
Скорость автомобиля 90 км/ч. Определить путь торможения до остановки, если среднее замедление автомобиля равно 3 м/с (104)	Точка начинает движение из состояния покоя и движется по прямой с постоянным ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$. Определить путь, который точка пройдет за промежуток времени от $t_1 = 4 \text{ с}$ до $t_2 = 10 \text{ с.}$ (8,4)
Скорость точки $v = 0,9ti + t^2 j$. Определить модуль ускорения в момент времени $t = 1,5 \text{ с.}$ (3,13)	7.4. Переменное ускорение точки в прямоугольной системе координат
Ускорение точки $a = 0,5ti + 0,2 t^2 j$. Определить модуль ускорения в момент времени $t = 2 \text{ с.}$ (1,28)	Даны проекции скорости на координатные оси $v_x = 3t$, $v_y = 2t^2$, $v_z = t^3$. Определить модуль ускорения в момент времени $t = 1 \text{ с.}$ (5,83)
Положение ТОЧКИ на плоскости определяется ее радиусом-вектором $r = 0,3t^2 i + 0,1 t^3 j$. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t = 2 \text{ с.}$ (1,34)	Даны уравнения движения точки $x = \cos \pi t$, $y = \sin \pi t$. Определить модуль ускорения в момент времени $t = 1 \text{ с.}$ (9,87)
Дано ускорение точки $a = 2 ti + t^2 j$. Определить угол в градусах между вектором a и осью Ox в момент времени $t = 1 \text{ с.}$ (26,6)	Даны уравнения движения точки: $x = 8 - t^2$, $y = t^2 - \cos t$. Определить проекцию ускорения a_y в момент времени, когда координата $x = 0$. (1,05)
Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 0,2t$. Определить	Точка движется по прямой Ox с ускорением $a_x = 0,7t$. Определить координату x точки в

момент времени t , когда скорость точки будет равна 2 м/с, если, при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$. (4,47)	момент времени $t = 5$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$ и координата $x_0 = 0$. (14,6)
Точка движется по траектории согласно уравнению $s = 15 + 4 \sin \pi t$. Указать ближайший после начала движения момент времени t_1 , при котором $s_1 = 17$ м. (0,167)	7.5. Уравнение движения и скорость точки при естественном способе задания движения
Точка движется по траектории согласно уравнению $s = 0,5 t^2 + 4t$. Определить, в какой момент времени скорость точки достигнет 10 м/с. (6)	Точка движется по заданной траектории со скоростью $v = 5$ м/с. Определить криволинейную координату s точки в момент времени $t = 18$ с, если при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 26$ м. (116)
Точка движется по кривой со скоростью $s' = 0,5 t$. Определить ее координату в момент времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ координата точки $s_0 = 0$. (25)	Скорость точки задана уравнением $v = 0,2 t$. Определить криволинейную координату s точки в момент времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$. (10)
Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 3t^2$, $y = 4t^2$. Определить момент времени, когда криволинейная координата точки $s = 110$ м, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ и точка движется в положительном направлении координаты s . (4,69)	Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$. Определить момент времени, когда криволинейная координата точки $s = 7$ м, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$. Точка движется в положительном направлении координаты s . (2, 33)
Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 5t$. Определить криволинейную координату s точки в момент времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 14$ м и точка движется в положительном направлении координаты s . (75,6)	Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$. Определить криволинейную координату s точки в момент времени $t = 5$ с, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ и точка движется в положительном направлении координаты s . (10)
	7.6. Касательное ускорение точки
Точка движется по окружности согласно уравнению $s = t^3 + 2 t^2 + 3 t$. Определить криволинейную координату точки в момент времени, КОГДА ее касательное ускорение $a_t = 16$ м/с ² . (22)	Точка движется с постоянным касательным ускорением $a_t = 0,5$ м/с ² . Определить криволинейную координату точки в момент времени $t = 4$ с, если при $t_0 = 0$ скорость точки $v_0 = 0$, координата $s_0 = 0$. (4)
Проекции скорости точки во время движения определяются	Скорость точки в декартовых координатах задана выражением $v = 1,5i + 1,5 tj + 0,5 t^2 k$.

выражениями: $v_x = 0,2 t^2$, $v_y = 3$ м/с. Определить касательное ускорение в момент времени $t = 2,5$ с. (0,385)	Определить касательное ускорение точки в момент времени $t = 2$ с. (2,18)
Проекции ускорения точки во время движения определяются выражениями $a_x = 0,8 t$ м/с ² , $a_y = 0,8$ м/с ² . Найти касательное ускорение в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ скорость точки $v_0 = 0$. (1,70)	Ускорение точки в декартовых координатах задано выражением $a = 0,1 ti + 0,9 j$. Определить касательное ускорение точки в момент времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ скорость точки $v_0 = 0$. (1,27)
7.7. Нормальное ускорение точки	Точка движется с постоянной скоростью $v = 30$ см/с по дуге окружности радиуса $r = 2$ м. Определить нормальное ускорение точки в см/с ² . (4,5)
По окружности движется точка согласно уравнению $s = 5t - 0,4 t^2$. Определить время t , когда нормальное ускорение $a_n = 0$. (6,25)	Определить радиус закругления трассы бобслея, если при скорости спуска 120 км/ч нормальное ускорение саней $a_n = 2g$. (56,6)
Электровоз движется по дуге окружности радиуса $R = 300$ м. Определить максимальную скорость электровоза в км/ч, при которой нормальное ускорение не превышало бы 1м/с ² . (62,4)	Самолет летит по круговой траектории, радиус которой $r = 10$ км. Определить скорость самолета в км/ч, если его нормальное ускорение $a_n = 6,25$ м/с ² . (900)
Дано уравнение движения точки по траектории: $s = 0,1 t^2 + 0,2t$. Определить ее нормальное ускорение в момент времени $t = 6$ с. В положении, занимаемом точкой в этот момент, радиус кривизны траектории $\rho = 0,6$ м. (3,27)	Дано уравнение движения точки по траектории $s = 0,6t^2$. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее координата $s = 30$ м и радиус кривизны траектории $\rho = 15$ м. (4,80)
По окружности, радиус которой $r = 7$ м, движется точка согласно уравнению $s = 0,3 t^2$. Определить время, когда нормальное ускорение точки $a_n = 1,5$ м/с ² . (5,40)	Точка движется по окружности, радиус которой $r = 20$ м, со скоростью $v = e^t$. Определить момент времени, когда нормальное ускорение точки $a_n = 3$ м/с ² . (2,05)
Точка движется по окружности радиуса $r = 2$ м. Нормальное ускорение точки меняется согласно закону $a_n = 2t^2$. Определить угол в градусах между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени $t = 1$ с. (45)	7.8. Ускорение точки при естественном способе задания движения
Даны нормальное $a_n = 2,5$ м/с ² и касательное $a_t = 1,5$ м/с ² ускорения точки. Определить полное ускорение точки. (2,92)	Определить модуль ускорения точки, если его вектор $a = 2,5 n + 3,5 \tau$, где n и τ - орты естественного триэдра. (4,30)
Точка движется по криволинейной	Определить нормальное ускорение точки в

траектории с касательным ускорением $a_t = 1,4 \text{ м/с}^2$. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее полное ускорение $a = 2,6 \text{ м/с}^2$. (2,19)	момент времени, когда ускорение точки $a = 1,5 \text{ м/с}^2$, а угол между векторами ускорения и скорости равен 65° . (1,36)
Точка движется по окружности. Определить радиус окружности, если в момент времени, когда скорость $v = 10 \text{ м/с}$, вектор ускорения и вектор скорости, равный по модулю $1,2 \text{ м/с}$, образуют угол 30° . (167)	Ускорение точки $a = 1 \text{ м/с}^2$. Векторы ускорения и скорости образуют угол 45° . Определить скорость в км/ч, если радиус кривизны траектории $\rho = 300 \text{ м}$. (52,4)
Точка движется по окружности, радиус которой $r = 200 \text{ м}$, с касательным ускорением 2 м/с^2 . Определить угол в градусах между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени, когда ее скорость $v = 10 \text{ м/с}$. (14,0)	Задано уравнение движения точки по криволинейной траектории: $s = 0,2t^2 + 0,3t$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 3 \text{ с}$, если в этот момент радиус кривизны траектории $\rho = 1,5 \text{ м}$. (1,55)
8.2.5 Угловая скорость маховика изменяется согласно закону $\omega = \pi(6t - t^2)$. Определить время $t > 0$ остановки маховика. (6)	8.2. Вращательное движение твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение. Скорость и ускорение точек тела
Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 4 + 2t^3$. Определить угловое ускорение тела в момент времени, когда угловая скорость $\omega = 6 \text{ рад/с}$. (12)	Угловая скорость тела изменяется согласно закону $\omega = 2 - 8t^2$. Определить время t остановки тела. (0,5)
Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 2t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 4 \text{ с}$, если при $t_0 = 0$ угловая скорость равна нулю. (16)	Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 3t^2$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 2 \text{ с}$, если при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 2 \text{ рад/с}$. (10)
Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^2$. Определить скорость точки тела на расстоянии $r = 0,5 \text{ м}$ от оси вращения в момент времени, когда угол поворота $\varphi = 25 \text{ рад}$. (5)	Угловая скорость балансира механических часов изменяется по закону $\omega = \pi \sin 4\pi t$. Определить в см/с скорость точки балансира на расстоянии $h = 6 \text{ мм}$ от оси вращения в момент времени $t = 0,125 \text{ с}$.
Скорость точки тела на расстоянии $r = 0,2 \text{ м}$ от оси вращения изменяется по закону $v = 4t^2$. Определить угловое ускорение данного тела в момент времени $t = 2 \text{ с}$. (80)	Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2t^2$. Определить нормальное ускорение точки тела на расстоянии $r = 0,2 \text{ м}$ от оси вращения в момент времени $t = 2 \text{ с}$. (12,8)

Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2 t^3$. В момент времени $t = 2$ с определить касательное ускорение точки тела на расстоянии от оси вращения $r = 0,2$ м. (4,8)	Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 2t^3$. Определить касательное ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с. (4,8) (1,88)
---	--

Список рекомендуемой литературы

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2-х т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. - Т.1 : Статика и кинематика; Т.2: Динамика. - 11-е изд., стер. - СПб. : Изд-во "Лань", 2009. - 736 с. : ил. ; 21 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Митюшов, Е.А. Теоретическая механика. Учебник для студентов вузов./ Е.А. Митюшов, С.А. Берестова. – М.: Академия, 2006. –320 с.
3. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. –607 с.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
5. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Изд-во "Лань", 2010. – 448 с.
6. Статика. Электронное издание локального распространения, 060190 Э. Методическое пособие. Сост. Олышанский В.Ю., Ткаченко Г.П. СГТУ, 2005.
7. Кепе, О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике / О.Э. Кепе. – СПб.: Изд-во "Лань", 2008. – 368 с.